# sistemas enredados

## Productos Tensoriales

### → Alice and Bob

Consideremos dos sistemas diferentes: Sistema A (Alice) y Sistema B (Bob), cuyos estados están descritos por $S_A$ y $S_B$ respectivamente

Si quisiéramos combinar los dos sistemas en un solo sistema compuesto, pero antes de eso notemos que en un sistema clásico, tendríamos un estado u otro, siendo H y T los estados de $S_A$, pero cuando hablamos de un sistema cuántico, deberemos considerar la superposición de estados. $\alpha_H |H\rangle + \alpha_T |T\rangle$.

Además, vamos a suponer que $S_A$ es un espacio vectorial de dos dimensiones definido por dos vectores base $|H\rangle$ y $|T\rangle$. Veámoslo como una moneda.

Ahora, el sistema $S_B$ lo asumiremos un cubo cuántico, por lo que tendrá un espacio vectorial de seis dimensiones con las bases:

$|1\rangle$

$|2\rangle$

$|3\rangle$

$|4\rangle$

$|5\rangle$

$|6\rangle$

Así como la moneda de Alice, el dado de Bob es mecánico cuántico y los seis estados pueden estar superpuestos de una manera similar.

# → Representando el sistema combinado

Imaginemos que Bob y Alice existen y forman un sólo sistema compuesto.
¿Cómo podríamos construir el espacio-estado $S_{AB}$ para el sistema combinado? Deberemos formar el producto tensorial de $S_A$ y $S_B$:

$$S_{AB} = S_A \otimes S_B$$

Para definir $S_{AB}$, basta con especificar sus vectores base.

Estados de Bob

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| H | $H_1$ | $H_2$ | $H_3$ | $H_4$ | $H_5$ | $H_6$ |
| T | $T_1$ | $T_2$ | $T_3$ | $T_4$ | $T_5$ | $T_6$ |

Estados de Alice

Las columnas de la tabla corresponden a los vectores base de Bob y los renglones a los de Alice.

Cada recuadro en la tabla denota un vector base de $S_{AB}$. Por ejemplo, $H_4$ representa un estado en $S_{AB}$ en el cual la moneda cae en H y el dado en 4.
En el sistema combinado hay 12 vectores base.
Otra manera de representar $H_4$ usando notación explícita sería

$$|H\rangle \otimes |4\rangle \quad \text{ó} \quad |H,4\rangle \quad \text{ó} \quad |H_4\rangle$$

Una vez que enlistamos los vectores base, podemos combinarlos linealmente para formar superposiciones arbitrarias. Por lo que el espacio del producto tensorial tiene 12 dimensiones.
La superposición de dos de los vectores base se verán como

$$\alpha_{H3}|H_3\rangle + \alpha_{T4}|T_4\rangle$$

Aunque también podríamos referirnos a un vector base arbitrario en $S_{AB}$. Para hacerlo usamos ket vectores $|ab\rangle$ ó $|a'b'\rangle$ ($a, a'$ estados de Alice y $b, b'$ estados de Bob) y representan un sólo estado

# Correlación clásica

Hablemos primero sobre enredado clásico.

Supongamos que tenemos dos monedas; una para Alice y otra para Bob. Ninguno de los dos ve su moneda. Alice se va a Alpha Centauri y Bob a Palo Alto, antes de iniciar su viaje ellos sincronizan sus relojes considerando la dilatación temporal relativista. Acuerdan que Alice verá su moneda uno o dos segundos después de que Bob vea la suya. En el momento en que Alice ve su moneda, inmediatamente sabe qué moneda tiene Bob aún antes de que él la vea.

Siendo más realistas, pintemos $\sigma = +1$ y $\sigma = -1$ en las monedas y se entregaran al azar a cada sistema, tendremos que:

1. En promedio, ambos A y B tendrán cantidades iguales de monedas y centavos. Llamemos a las observables de A $\sigma_A$ y a las de B $\sigma_B$. Es decir:

$$\langle \sigma_A \rangle = 0$$
$$\langle \sigma_B \rangle = 0$$

2. Si A y B graban sus observaciones y se reúnen en Palo Alto para compararlas, verán una correlación. Para cada prueba, si A observó $\sigma_A = +1$, entonces $\sigma_B = -1$ y viceversa. En otras palabras, el producto de $\sigma_A \sigma_B = -1$

$$\langle \sigma_A \sigma_B \rangle = -1$$

Notemos que el promedio de los productos es distinto al producto de promedios:

$$\langle \sigma_A \rangle \langle \sigma_B \rangle = 0$$
$$\langle \sigma_A \rangle \langle \sigma_B \rangle \neq \langle \sigma_A \sigma_B \rangle$$

Por lo que:

$$\langle \sigma_A \sigma_B \rangle - \langle \sigma_A \rangle \langle \sigma_B \rangle \neq 0$$

→ La correlación entre las observaciones de A y B. Correlación estadística

Cuando la correlación estadística es distinta a cero, decimos que las observaciones están correlacionadas.

Supongamos que tenemos la distribución de probabilidad $P(a,b)$ para dos variables a y b. Si las variables están completamente no correlacionados, entonces la probabilidad se factoriza de la siguiente manera:

$P(a,b) = P_A(a)\,P_B(b)$ ; $P_A(a)$ y $P_B(b)$ las probabilidades individuales para a y b → El promedio del producto es el producto de los promedios

## Combinando Sistemas Cuánticos

Ya no vamos a usar monedas o dados, ahora nuestro sistema estará compuesto por dos spines. Seguiremos usando la notación $|a\rangle$ para recordarnos que los vectores-estado de Alice no están en el mismo espacio-estado que Bob, y no tenemos permitido sumarlos. También, tengamos presente que cada elemento de la base ortonormal $S_{AB}$, está etiquetado por un par de vectores, uno de $S_A$ y otro de $S_B$. Usaremos la notación $|ab\rangle$ para nombrar un vector base del sistema combinado. Estos vectores base doblemente indexados sí se pueden sumar.

Consideremos un operador lineal M actuando en el espacio de estados del sistema compuesto. M está representado como una matriz, y los elementos de ésta se construyen así:

$$\langle a'b'|M|ab\rangle = M_{a'b',ab}$$

Los vectores $|ab\rangle$ son ortonormales (sus productos internos son cero), entonces:

$$\langle ab|a'b'\rangle = \delta_{aa'}\delta_{bb'}$$ → El lado derecho es cero a menos de que $a=a'$ y $b=b'$; en tal caso el producto interno es uno.

Ahora que tenemos los vectores base, cualquier superposición de ellos está permitido. Por tanto, cualquier estado en el sistema compuesto se puede anotar como:

$$|\psi\rangle = \sum_{a,b} \psi(a,b)|ab\rangle$$

**Ejemplo**: $|\psi\rangle = \psi_{uu}|uu\rangle + \psi_{ud}|ud\rangle + \psi_{du}|du\rangle + \psi_{dd}|dd\rangle$ es el vector más general para estados compuesto.

## → Dos espines

Tenemos dos espines: el de Bob y el de Alice. Ambos espines están adjuntos a dos partículas y estas partículas están fijadas a dos posiciones cercanas pero diferentes. Alice y Bob tienen sus propios aparatos A y B respectivamente.

Las componentes de los spines son:

$\sigma_x^A, \sigma_y^A, \sigma_z^A$ el spin de Alice

$\sigma_x^B, \sigma_y^B, \sigma_z^B$ el spin de Bob

→ El espacio de estados de un sistema de dos spines es un producto tensorial.

Trabajamos ahora en una base donde los componentes $\sigma_z$ de ambos spines están especificados. Los vectores base serán $|uu\rangle, |ud\rangle, |du\rangle, |dd\rangle$

## → Estados producto

Un estado producto es el resultado de una preparación completamente independiente de Alice y Bob, en la cual cada uno usa su propio aparato (A, B) para preparar un spín.

Supongamos que Alice prepara su spin en el estado $\alpha_u|u\rangle + \alpha_d|d\rangle$ y de manera análoga Bob lo prepara como $\beta_u|u\rangle + \beta_d|d\rangle$. Asumimos que cada estado está normalizado:

$$\alpha_u^* \alpha_u + \alpha_d^* \alpha_d = 1 \; ; \; \beta_u^* \beta_u + \beta_d^* \beta_d = 1$$

El estado producto que describe el sistema combinado es

$$|\text{estado producto}\rangle = \{\alpha_u|u\rangle + \alpha_d|d\rangle\} \otimes \{\beta_u|u\rangle + \beta_d|d\rangle\}$$

$$= \alpha_u\beta_u|uu\rangle + \alpha_u\beta_d|ud\rangle + \alpha_d\beta_u|du\rangle + \alpha_d\beta_d|dd\rangle$$

La característica principal de un producto estado es que cada subsistema se comporta independientemente del otro.

Recordar que: Un producto tensorial es un vector-espacio que nos permite estudiar sistemas compuestos.

Un producto estado es un vector estado.

# Sistemas Enredados

Recordamos el vector más general de un espacio de estados compuesto es $\psi_{uu}|uu\rangle + \psi_{ud}|ud\rangle + \psi_{du}|du\rangle + \psi_{dd}|dd\rangle$, donde la condición de normalización es:

$$\psi_{uu}^* \psi_{uu} + \psi_{ud}^* \psi_{ud} + \psi_{du}^* \psi_{du} + \psi_{dd}^* \psi_{dd} = 1$$

→ Tenemos cuatro números complejos y una condición de normalización

Este espacio de estados es más "rico" que aquellos productos estado que se pueden preparar independientemente. Algo nuevo está sucediendo; se llama entrelazamiento.

Un ejemplo de un sistema altamente entrelazado es el singulete:

$$|sing\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|ud\rangle - |du\rangle)$$

→ Notemos que no puede escribirse como un producto estado.

Lo mismo sucede para los estados del triplete:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|ud\rangle + |du\rangle) \; ; \; \frac{1}{\sqrt{2}}(|uu\rangle + |dd\rangle) \; ; \; \frac{1}{\sqrt{2}}(|uu\rangle - |dd\rangle)$$

Notamos que:

1. Un estado enredado es una descripción completa del sistema combinado.
2. En un estado de máximo enredamiento no se conoce nada sobre las partes individuales

## → Observables de Bob y Alice (spin 1/2)

Hasta ahora hemos descrito un sistema de dos spines, pero no sus observables

Los observables se pueden representar como operadores Hermitianos de manera que si los operadores de Bob actúan sobre los estados del spin de Bob exactamente como lo harían si Alice nunca hubiera aparecido y viceversa, de manera que:

| Alice | Bob |
|---|---|
| $\sigma_z^A\|u\rangle = \|u\rangle$ ; $\sigma_z^A\|d\rangle = \|d\rangle$ | $\sigma_z^B\|u\rangle = \|u\rangle$ ; $\sigma_z^B\|d\rangle = \|d\rangle$ |
| $\sigma_x^A\|u\rangle = \|d\rangle$ ; $\sigma_x^A\|d\rangle = \|u\rangle$ | $\sigma_x^B\|u\rangle = \|d\rangle$ ; $\sigma_x^B\|d\rangle = \|u\rangle$ |
| $\sigma_y^A\|u\rangle = i\|d\rangle$ ; $\sigma_y^A\|d\rangle = -i\|u\rangle$ | $\sigma_y^B\|u\rangle = i\|d\rangle$ ; $\sigma_y^B\|d\rangle = -i\|u\rangle$ |

Ahora consideremos cómo los operadores deben estar definidos cuando actúan sobre los estados de producto tensorial ($|uu\rangle$, $|ud\rangle$, $|du\rangle$, $|dd\rangle$). Cuando $\sigma^A$ actúa, "ignora" la mitad de Bob y viceversa:

| Alice | Bob |
|---|---|
| $\sigma_z^A\|uu\rangle = \|uu\rangle$ ; $\sigma_z^A\|du\rangle = -\|du\rangle$ | $\sigma_z^B\|uu\rangle = \|uu\rangle$ ; $\sigma_z^B\|du\rangle = \|du\rangle$ |
| $\sigma_x^A\|ud\rangle = \|dd\rangle$ ; $\sigma_x^A\|dd\rangle = \|ud\rangle$ | $\sigma_x^B\|ud\rangle = \|uu\rangle$ ; $\sigma_x^B\|du\rangle = \|dd\rangle$ |
| $\sigma_y^A\|uu\rangle = i\|du\rangle$ ; $\sigma_y^A\|du\rangle = -i\|uu\rangle$ | $\sigma_y^B\|uu\rangle = i\|ud\rangle$ ; $\sigma_y^B\|dd\rangle = -i\|du\rangle$ |

Notación: • $\sigma_z^A|du\rangle = -|du\rangle$ (si sólo está $\sigma^A$)

$(\sigma_z^A \otimes I)(|d\rangle \otimes |u\rangle) = (\sigma_z^A|d\rangle \otimes I|u\rangle) = (-|d\rangle \otimes |u\rangle)$

• Si están $\sigma_z^A \sigma_z^B$

$\sigma_z^A \sigma_z^B |du\rangle = \sigma_z^A|d\rangle \sigma_z^B|u\rangle$

Es importante saber que en un producto estado, cada predicción sobre la mitad de Bob del sistema es exactamente lo mismo que habría sido en la teoría de un solo spín correspondiente. Lo mismo para Alice. Un ejemplo de esta propiedad de productos estado es la polarización del spín.

Para cada estado de un sólo spín, existe alguna dirección para la cual el spín es +1. → Esto significa que los valores esperados satisfacen:

$$\langle\sigma_x\rangle^2 + \langle\sigma_y\rangle^2 + \langle\sigma_z\rangle^2 = 1$$

Pero, ¿qué pasa con el singulete? Recordemos que el estado enredado está definido por $|sing\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|ud\rangle - |du\rangle)$. Veamos los valores esperados de $\sigma$ en este estado.

→ $\sigma_z$

$$\langle\sigma_z\rangle = \langle sing|\sigma_z|sing\rangle = \langle sing|\sigma_z \tfrac{1}{\sqrt{2}}(|ud\rangle - |du\rangle)$$

$$= \langle sing|\tfrac{1}{\sqrt{2}}(|ud\rangle + |du\rangle)$$

Entonces, $\langle\sigma_z\rangle = \frac{1}{2}(\langle ud| - \langle du|)(|ud\rangle + |du\rangle) = 0$

→ $\sigma_x$

$$\langle\sigma_x\rangle = \langle sing|\sigma_x|sing\rangle = \langle sing|\sigma_x \tfrac{1}{\sqrt{2}}(|ud\rangle - |du\rangle)$$

$$= \tfrac{1}{2}(\langle ud| - \langle du|)(|dd\rangle - |uu\rangle) = 0$$

→ $\sigma_y$

$$\langle\sigma_y\rangle = \langle sing|\sigma_y|sing\rangle = \tfrac{1}{2}(\langle ud| - \langle du|)(i|dd\rangle + i|uu\rangle) = 0$$

Si el valor esperado de un componente de $\sigma$ es cero, significa que el resultado experimental puede ser $+1$ ó $-1$. Es decir, el resultado es completamente incierto. Aunque conozcamos el vector-estado exacto $|sing\rangle$, no sabemos nada del resultado de ninguna medida o de algun componente de cualquier spín.

## → Observables Compuestos

Supongamos que Alice mide $\sigma_z^A$ y Bob $\sigma_z^B$, y logran medir $\sigma_z^B \sigma_z^A$.

El producto $\sigma_z^B \sigma_z^A$ es un observable que está matemáticamente representado por aplicar primero $\sigma_z^A$ al ket y luego aplicar $\sigma_z^B$:

Primero aplicamos $\sigma_z^A$:

$$\sigma_z^B \sigma_z^A \frac{1}{\sqrt{2}}(|ud\rangle - |du\rangle) = \sigma_z^B \frac{1}{\sqrt{2}}(|ud\rangle + |du\rangle)$$

Ahora aplicamos $\sigma_z^B$:

$$\sigma_z^B \sigma_z^A \frac{1}{\sqrt{2}}(|ud\rangle - |du\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-|ud\rangle + |du\rangle)$$

$$\therefore \sigma_z^B \sigma_z^A |sing\rangle = -|sing\rangle$$

→ $|sing\rangle$ es eigenvector de $\sigma_z^B \sigma_z^A$ con eigenvalor $-1$